

ЛЕКЦИЯ 12

§ 1. Орнықтылық теориясының негізгі ұғымдары

Дифференциалдық теңдеулердің қалыпты жүйесін қарастырамыз :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1)$$

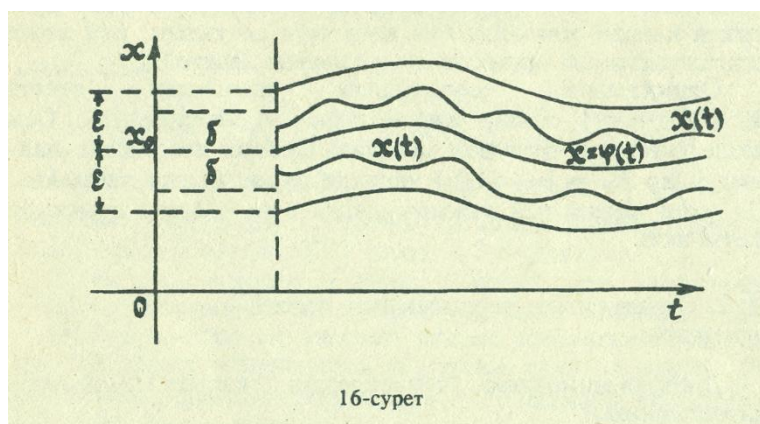
Мұндағы $t \in R$, $x = colon(x_1, \dots, x_n)$ – белгісіз вектор-функция, $f(t, x) = colon(f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ – берілген вектор-функция. Ол функция белгілі бір ашық $D \subset R^{1+n} = R_t \times R_x^n$ облысында $f \in C_{t,x}^{(0,1)}(D)$ шартын қанағаттандырады деп есептейміз. Бұл жағдайда D облысының кез келген нүктесі арқылы (1) жүйенің жалғыз ғана шешімі өтеді.

1–А Н Ы Қ Т А М А. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ және бастапқы $t_0 \in R_0^+ = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$ мәні үшін $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ саны табылып, (1) жүйенің $x = \varphi(t)$ белгілі шешімі мен мына теңсіздікті

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \quad (\varphi(t_0) =: x_0) \quad (2)$$

қанағаттандыратын барлық $x = x(t)$ шешімдері

- 1) $\forall t \in [t_0; +\infty)$ мәндерінде анықталса (яғни $(t, x(t)) \in D, \forall t \in [t_0; +\infty)$) және
- 2) $\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0; +\infty)$ (3)



теңсіздігін қанағаттандырса, онда $x = \varphi(t)$ шешімі *Ляпунов* бойынша $t \rightarrow +\infty$ кезде *орнықты* деп аталады ([1], [8]). Орнықтылық ұғымының геометриялық түсініктемесі мынадай. Кез келген бастапқы t_0 мезетінде $x = \varphi(t)$ интегралдық қисығына жақын болатын (қашықтығы δ –ден кем) (1) жүйенің кез келген интегралдық қисықтары шексіз ұзартылмалы болса (яғни $\forall t \in [t_0; +\infty)$ мәнінде анықталса) және $x = \varphi(t)$ қисығын айналдыра құрған барынша тар ε – түтікшенің ішіне толығынан (бүйіріне жанаспай) орналасса, онда $x = \varphi(t)$ шешімі орнықты деп аталады (16-сурет).

(2) және (3) теңсіздіктердің мағынасынан барлық кезде $\delta \leq \varepsilon$ етіп таңдап алуға болатыны көрініп тұр.

2–А Н Ы Қ Т А М А. Егер $\delta > 0$ санын бастапқы $t_0 \in R_0^+$ мезетінен тәуелсіз етіп таңдап алуға (яғни $\delta = \delta(\varepsilon)$) болса, онда *орнықтылық бірқалыпты* деп аталады.

3–А Н Ы Қ Т А М А. Егер $x = \varphi(t)$ шешімі Ляпунов бойынша орнықты болса және кез келген $t_0 \in R_0^+$ үшін $\delta_0 = \delta(t_0) > 0$ саны табылып, $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta_0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $x = x(t)$ шешімдері үшін

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$$

теңдігі орындалатын болса, онда $x = \varphi(t)$ шешімі $t \rightarrow +\infty$ кезде *асимптотикалық орнықты* деп аталады.

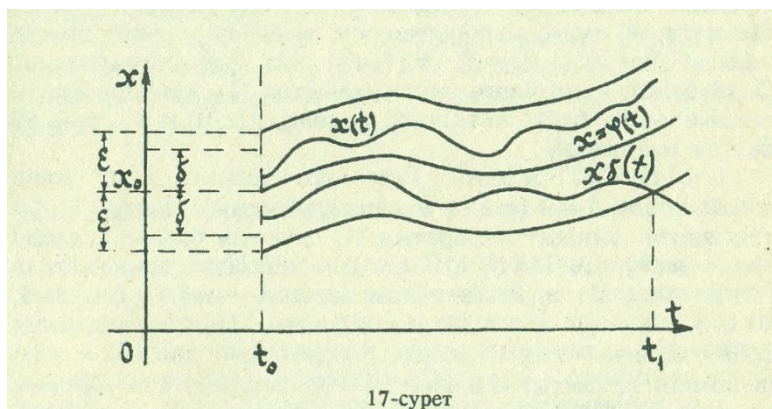
Асимптотикалық орнықтылықтың геометриялық түсініктемесі мынадай. Кез келген бастапқы мезет $t_0 \in R_0$ -де $x = \varphi(t)$ интегралдық қисығына жақын болатын (қашықтығы δ_0 -ден кем) (1) жүйенің барлық интегралдық қисықтары $t \rightarrow +\infty$ кезде $x = \varphi(t)$ қисығына шексіз ұмтылатын болса, онда $x = \varphi(t)$ шешімі асимптотикалық орнықты.

4–А Н Ы Қ Т А М А. Егер кейбір ε мен $t_0 \in R_0$ және кез келген $\delta > 0$ үшін ең болмағанда бір $x_\delta(t)$ шешімі және $T = T(\delta) > t_0$ мезеті табылып, мына теңсіздіктер

$$\|x_\delta(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta_0 \text{ және } \|x_\delta(T) - \varphi(T)\| \geq \varepsilon$$

орындалатын болса, онда $x = \varphi(t)$ шешімі Ляпунов бойынша *орнықсыз* деп аталады.

Басқаша айтқанда, орнықты емес шешім орнықсыз деп аталады. Орнықсыздық ұғымының геометриялық түсініктемесі мынадай. Бастапқы мезетте $x = \varphi(t)$ интегралдық қисығына жақын орналасатын, ал кейінгі бір мезетте $x = \varphi(t)$ қисығын айналдыра құрған барынша тар ε – түтікшенің бүйіріне тірелетін немесе түтікшеден шығып кететін ең болмағанда бір интегралдық қисық бар болса, онда $x = \varphi(t)$ шешімі орнықсыз (17-сурет).



17-сурет

Қандай да болмасын бір белгілі шешімнің орнықты немесе орнықсыздығын зерттеуді нөлдік шешімнің $x(t)=0, \forall t \in R_0^+$ (яғни Ot сәулесі) орнықты немесе орнықсыздығын зерттеумен ауыстыруға болады.

Айталық, $x = \varphi(t)$ орнықтылыққа зерттелінетін шешім болсын және оның U_h аймағы

$$U_h(t, \varphi(t)) = \{(t, x) \in R_{x,t}^{n+1} : t \in [t_0, +\infty), \|x - \varphi(t)\| \leq h < +\infty\}$$

D облысында жатсын, яғни $U_h(t, \varphi(t)) \subset D$. Енді (1) жүйеге $y = x - \varphi(t)$ ауыстыруын енгізейік. Сонда

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, x) - f(t, \varphi(t)) = \\ &= f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)) =: g(t, y), \end{aligned}$$

яғни жаңа функция y бойынша

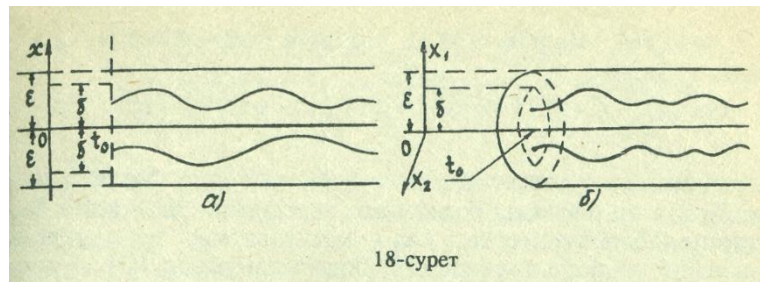
$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \quad (4)$$

жүйесін аламыз. Мұнда $g(t, y) \in C_{t,y}^{(0,1)}(D_0)$,

$$D_0 = \{(t, y) \in R_{y,t}^{n+1} : t \in [t_0; +\infty), \|y\| \leq h\} \text{ және } g(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [t_0; +\infty).$$

Сондықтан (4) жүйенің нөлдік шешімі ($y(t)=0, \forall t \in [t_0; +\infty)$) бар, ол $R_{x,t}^{n+1}$ кеңістігіндегі $x = \varphi(t)$ шешіміне сәйкес келеді. (4) жүйені *келтірілген жүйе* деп атайды. Сонымен $R_{x,t}^{n+1}$ кеңістігіндегі $x = \varphi(t)$ шешімінің орнықтылығын зерттеу $R_{y,t}^{n+1}$ кеңістігіндегі $y(t)=0, \forall t \in [t_0; +\infty)$ шешімінің орнықтылығын зерттеуге әкеліп тіреледі. Сондықтан тұжырымның жалпылығына кеселсіз, (1) жүйе (4) түрге келтірілген деп, яғни (1) жүйенің нөлдік шешімі бар ($f(t, 0) = 0, \forall t \in R_0$) деп есептеуге болады. Олай болса, келтірілген анықтамаларды (1) жүйенің нөлдік шешімі үшін беру жеткілікті (әрине $f(t, 0) = 0, \forall t \in R_0$ болған жағдайда).

1*–А Н Ы Қ Т А М А. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ және $t_0 \in R_0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ саны табылып, $\|x(t_0)\| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын (1) жүйенің барлық $x = x(t)$ шешімдері үшін $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geq t_0$ теңсіздігі орындалатын болса, онда (1) жүйенің нөлдік шешімі – $x_0(t)$ ($x_0(t) = 0, \forall t \in [t_0; +\infty)$) *орнықты* деп аталады. Нөлдік шешімнің орнықтылығы геометриялық тұрғыдан дәл $x = \varphi(t)$ шешімінің орнықтылығы сияқты түсіндіріледі. Тек мұнда ε – түтікше өсі $[t_0, t)$ сәулесі болатын цилиндр түрінде болады. 18-сурет көрнектірек болу үшін, оны үйреншікті үш өлшемді кеңістікте салайық, яғни $n = 2, x = (x_1, x_2) \in R_x^2, t \in R_0^+, R_{x,t}^3 = R_x^2 \times R_0^+$ болсын (18, б-сурет).



18-сурет

2*–А Н Ы Қ Т А М А. Егер (1* - Анықтамадағы) $\delta > 0$ санын $t_0 \in R_0$ бастапқы мезетінен тәуелсіз, тек қана $\varepsilon > 0$ -нан тәуелді етіп алуға болатын болса, онда нөлдік шешім *бірқалыпты орнықты* деп аталады.

3*–А Н Ы Қ Т А М А. Егер нөлдік шешім орнықты болса және кез келген $t_0 \in R_0$ үшін $\delta_0 = \delta_0(t_0)$ табылып, мына теңсіздікті $\|x(t_0)\| < \delta_0$ қанағаттандыратын барлық $x = x(t)$ шешімдері үшін $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ теңдігі орындалатын болса, онда нөлдік шешім *асимптотикалық орнықты* деп аталады.

Асимптотикалық орнықтылық геометриялық тұрғыдан қарағанда бастапқы мезетте $(t_0, 0)$ нүктесіне аз қашықтықта болатын интегралдық қисықтар $t \rightarrow +\infty$ кезде Ot жарты өсіне шексіз ұмтылатынын көрсетеді.

4*–А Н Ы Қ Т А М А. Егер нөлдік шешім орнықты болмаса, яғни кейбір $\varepsilon > 0$ мен $t_0 \in R_0$ және кез келген $\delta > 0$ үшін ең болмағанда бір $x_\delta(t)$ шешімі және $T = T(\delta) > t_0$ мезеті табылып, мына теңсіздіктер $\|x_\delta(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x_\delta(T)\| \geq \varepsilon$ орындалатын болса онда нөлдік шешім *орнықты* деп аталады.

Е С К Е Р Т У Л Е Р. 1. Белгілі бір шешімнің орнықтылығы оның өзінің тербелмейтіндігін, шектелгендігін, тұрақтылығын т.б. сол сияқты қасиеттерін білдірмейді. Ол ұғым басқа шешімдердің осы шешімнің айналасына шоғырланатынын көрсетеді. Орнықты шешімнің өзінің тәртібі әр түрлі (шектелген немесе шектелмеген т. с. с.) бола береді.

2. Коши есебі шешімінің бар және жалғыз болуын қамтамасыз ететін қандай да болмасын бір бастапқы мезет үшін орнықты шешім кез келген басқа мезет үшін де орнықты болады.

Айталық, $\forall \varepsilon > 0, t_0 \in R_0$ сандары үшін $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ саны табылып,

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \leq \varepsilon \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon; \forall t \geq t_0 \quad (5)$$

теңсіздіктері орындалсын. Осы $\varphi(t)$ шешімінің басқа t_1 мезеті үшін де орнықты болатынын көрсетейік. Шешімнің бастапқы берілгендерден, ол анықталатын кез келген кесіндіде үзіліссіз тәуелділікте болатындығынан (§1, 1–теорема), $\forall \delta(\varepsilon, t_0) \leq \varepsilon$ және $t_1 \leq t_0$ сандары үшін $\exists \delta_1 = \delta_1(\delta, t_1) > 0$ ($\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t_1)$) саны табылады да,

$$\|x(t_1) - \varphi(t_1)\| < \delta_1 \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \delta(\varepsilon, t_0), \forall t \in [t_1; t_1].$$

Ал бұдан (5) теңсіздіктер негізінде $\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \forall t \in [t_1; +\infty)$ теңсіздігі шығады. Дәл осылай, егер шешім бір алғашқы мезет үшін орнықты болса, кез келген басқа мезет үшін де орнықты болатыны алынады.

Сондықтан шешімнің орнықты, орнықсыздығын және асимптотикалық орнықтылығын тек берілген бастапқы бір мезет үшін тексерсе болғаны.

Бұдан былай орнықтылық теоремаларын дәлелдегенде, біз әлбетте t_0 бекітілген деп есептейміз.

М Ы С А Л Д А Р. Төмендегі теңдеулердің берілген шартты қанағаттандыратын шешімнің орнықтылығын зерттеу керек.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

Жүйенің Коши түріндегі жалпы шешімі

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \end{cases} \quad x = colon(x, y).$$

Мұнда $x_0 := x(0), \quad y_0 := y(0).$

Ал берілген шартты қанағаттандыратын шешім

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = \cos t + \sin t, \\ y = \varphi_2(t) = \sin t - \cos t, \end{cases} \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Сондықтан $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ саны табылып,

$$\begin{aligned} \|x(0) - \varphi(0)\| &= |x(0) - \varphi_1(0)| + |y(0) - \varphi_2(0)| = |x_0 - 1| + |y_0 - 1| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| &= |x(t) - \varphi_1(t)| + |y(t) - \varphi_2(t)| = |(x_0 - 1) \cos t - (y_0 - 1) \sin t| + \\ &+ |(x_0 - 1) \sin t - (y_0 - 1) \cos t| \leq 2(|x_0 - 1| + |y_0 - 1|) < 2\delta < \varepsilon, \forall t \in R_0^+. \end{aligned}$$

Олай болса, берілген есептің шешімі орнықты және де δ саны тек қана ε -нан тәуелді болғандықтан, орнықтылық бірқалыпты. Ал $\|x(t) - \varphi(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ болатындықтан, ол шешім асимптотикалық орнықты емес.

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 3x - y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Жүйенің Коши түріндегі жалпы шешімі

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t}, \\ y(t) = (3x_0 t + y_0) e^{-t}, \end{cases} \quad \begin{aligned} t &\in R_0^+, x(t) = colon(x(t), y(t)) \\ x_0 &= x(0), y_0 = y(0). \end{aligned}$$

Берілген шартты қанағаттандыратын шешім

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = e^{-t}, \\ y = \varphi_2(t) = (1 + 3t) e^{-t}, \end{cases} \quad t \in R_0^+, \varphi(t) = colon(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Бұдан, $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) < \frac{e \cdot \varepsilon}{e + 3}$ саны табылып $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\|x(0) - \varphi(0)\| &= |x(0) - \varphi_1(0)| + |y(0) - \varphi_2(0)| = |x_0 - 1| + |y_0 - 1| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| &= |x(t) - \varphi_1(t)| + |y(t) - \varphi_2(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| + |3(x_0 - 1)te^{-t} + (y_0 - 1)e^{-t}| \leq \\ &\leq |x_0 - 1|(e^{-t} + 3te^{-t}) + |y_0 - 1|e^{-t},\end{aligned}$$

$$f(t) := 3te^{-t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow \exists \sup_{t \in [0, +\infty)} f(t) = f(1) = \frac{3}{e}.$$

Сондықтан

$$\begin{aligned}\|x(t) - \varphi(t)\| &\leq |x_0 - 1|(1 + \frac{3}{e}) + |y_0 - 1| < (1 + \frac{3}{e})(|x_0 - 1| + |y_0 - 1|) < \\ &< (1 + \frac{3}{e})\delta < \varepsilon, \forall t \geq t_0,\end{aligned}$$

яғни берілген есептің шешімі бірқалыпты орнықты. Ал

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| \leq |x_0 - 1| \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} + 3te^{-t}) + |y_0 - 1| \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$$

болғандықтан, зерттеп отырған $\varphi(t)$ шешімі асимптотикалық та орнықты.

$$3. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = \frac{1}{2}$$

Жүйенің Коши түріндегі жалпы шешімі болып,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}[(x_0 - y_0)e^{-t} + (x_0 + y_0)e^t] \\ x(t) = \frac{1}{2}[(y_0 - x_0)e^{-t} + (x_0 + y_0)e^t] \end{cases} \quad x_0 := x(0), y_0 := y(0)$$

функциялар жиынтығы болатыны көрсетілді (§ 1). Ал бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі болып,

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = \frac{1}{2}e^t \\ y = \varphi_2(t) = \frac{1}{2}e^t \end{cases}$$

функциялары табылады. Сондықтан кейбір $\varepsilon > 0$ және кез келген $\delta > 0$ үшін $x_\delta(t)$ шешімі және $t = t_1$ мезеті табылып,

$$\|x_\delta(0) - \varphi(0)\| < \delta, \quad \|x(t_1) - \varphi(t_1)\| \geq \varepsilon$$

теңсіздіктері орындалады.

Шынында да, $\varepsilon = 1$ деп алайық, ал $\forall \delta > 0$ үшін $x_\delta(t)$ шешімін мына бастапқы шарт

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{4}(2 + \delta)$$

арқылы анықтайық. Сонда $t = 0$ және $T_1 = \ln \frac{2 + \delta}{\delta}$ үшін мына теңсіздіктер орындалады:

$$\|x(0) - \varphi(0)\| = \left| \frac{1}{4}(2 + \delta) - \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{4}(2 + \delta) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta = \frac{1}{2}\delta < \delta,$$

$$\|x(t_1) - \varphi(t_1)\| = \left| \frac{1}{4}(2 + \delta) - \frac{1}{2} \right| e^T + \left| \frac{1}{4}(2 + \delta) - \frac{1}{2} \right| e^T = \frac{1}{2} \delta e^T = \frac{1}{2} \delta \frac{2 + \delta}{\delta} = 1 + \frac{\delta}{2} > 1,$$

яғни берілген есептің шешімі орнықсыз.

§ 2. Бірінші (сызықтық) жуықтау бойынша орнықтылық. Ляпуновтың теоремасы.

Қалыпты түрдегі жүйе қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad (1)$$

мұндағы $x = colon(x_1, \dots, x_n)$, $f = colon(f_1, \dots, f_n)$ және

$$A(t) \in C < a, b >, \quad A: R^n \rightarrow R^n, \quad f(t, 0) = 0, \quad f \in C_\infty^{(0,1)}(D),$$

$$D = \{(t, x) \in R^{n,n} : t \geq t_0 \geq 0, \quad \|x\| \leq h\}$$

$$\|f(t, x)\| \leq \gamma(\|x\|) \|x\|, \quad \|x\| \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma(\|x\|) \rightrightarrows 0, \quad \|x\| := \sqrt{(x, x)}.$$

Енді t өсінің кішкене аймағында шамасы аз $f(t, x)$ вектор-функциясын ескермей, мынадай жүйе қарастырайық:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y. \quad (2)$$

(2) жүйені сызықты емес (1) жүйенің *бірінші жуықтау* не *сызықты жуықтау жүйесі* деп атайды.

Кей жағдайларда сызықты емес (1) жүйенің нөлдік шешімінің орнықты немесе орнықсыздығын анықтау үшін тек сызықты (2) жүйені ғана қарастыру жеткілікті болуы мүмкін. Осындай мүмкіндік нәтижесінде алынған (1) жүйенің нөлдік шешімінің орнықты немесе орнықсыздығын *бірінші (сызықты) жуықтау бойынша орнықтылық* немесе *орнықсыздық* деп атайды.

Біз (1) жүйенің дербес жағдайы болып табылатын мынадай жүйе қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \quad (3)$$

мұндағы $t \in R_0^+$, $x \in C^n$, $A: R^n \rightarrow R^n$ – тұрақты матрица,

$$f = colon(f_1, \dots, f_n): D \rightarrow C^n \text{ және}$$

$$\|f(t, x)\| \leq \gamma(\|x\|) \|x\|, \quad \|x\| := \sqrt{(x, x)}, \quad (4)$$

Мұнда $\gamma(\|x\|) \rightrightarrows 0, \|x\| \rightarrow 0$. Біз кейінде A матрицасының жордандақ түрімен ісіміз болатын болғандықтан, (3) жүйені комплекс кеңістікте қарастырып отырмыз. Сондықтан (3) жүйенің нақты шешімдерімен қатар комплекс шешімдерін де қарастырамыз.

ЛЯПУНОВ ТЕОРЕМАСЫ. Егер A матрицасының барлық меншікті мәндерінің нақты бөліктері теріс болса, онда (3) жүйенің нөлдік шешімі (4)

теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген $f(t,x)$ функциясы үшін $t \rightarrow \infty$ кезде бірқалыпты және асимптотикалық орнықты болады.

Егер де A матрицасының ең болмағанда бір меншікті мәнінің нақты бөлігі оң болса, онда (3) жүйенің нөлдік шешімі (4) теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген $f(t,x)$ функциясы үшін $t \rightarrow \infty$ кезде орнықсыз болады.

ДӘЛЕЛДЕУ І. БӨЛІГІНІҢ ДӘЛЕЛДЕМЕСІ. A матрицасын жордандақ түрге келтіретін айрықша емес матрицаны S арқылы, ал оның жордандық түріндегі әр түрлі ұяшыққа сәйкес келетін меншікті мәндерді $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, ($m \leq n$) арқылы белгілейік. Ал $e_1, \dots, e_m$ меншікті мәндерге сәйкес келетін ұяшықтардың реті болсын. Ұяшықтардың өздерін сәйкес $I_{e_1}(\lambda_1), I_{e_2}(\lambda_2), \dots, I_{e_m}(\lambda_m)$ арқылы белгілейік. Онда

$$A = SIS^{-1} = S \operatorname{diag}(I_{e_1}(\lambda_1), I_{e_2}(\lambda_2), \dots, I_{e_m}(\lambda_m)) S^{-1},$$

$$\sum_{j=1}^m e_j = n.$$

Кез келген $\varepsilon_0 > 0$ үшін мына теңдіктерді $a_2 a_1^{-1} = a_3 a_2^{-1} = \dots = a_{e_q} \cdot a_{e_q-1}^{-1} = \varepsilon_0$ қанағаттандыратын нөлге тең емес $a_1, \dots, a_{e_q}$ сандарын алып, олардан құрылған диагональ матрица

$$R_{\varepsilon_q} = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_{e_q}) \quad (5)$$

қарастырайық. a_j сандары үшін мысалы ε_0^j сандарын алуға болады, яғни $a_j = \varepsilon_0^j$, $j = \overline{1, e_q}$. Сонда $R_{\varepsilon_q} = \operatorname{diag}(\varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^{e_q})$.

(5) матрицаның көмегімен мынадай теңдік алынады:

$$R_{\varepsilon_q}^{-1} I_{e_q}(\lambda_q) R_{\varepsilon_q} = \begin{pmatrix} \lambda_q & a_2 a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_q & a_3 a_2^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{e_q} \cdot a_{e_q-1}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_q & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Енді

$$R = \operatorname{diag}(R_{e_1}, \dots, R_{e_m})$$

матрицасын қарастырайық. Онда (клеткалардан) ұяшықтардан тұратын матрицаларды көбейту ережесіне сүйеніп,

$$R_{e_q}^{-1} I_{e_q} (\lambda_q) R_{e_q} = \text{diag}(R_{e_1}^{-1} I_{e_1} (\lambda_1) R_{e_1}, \dots, R_{e_m}^{-1} I_{e_m} (\lambda_m) R_{e_m}) = \Lambda + B_{\varepsilon_0}$$

теңдігін аламыз. Мұнда

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m), B_{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & b_{n-1,n} \\ 0 & \cdot & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

және $b_{i,j+1} = \varepsilon_0$ немесе $b_{i,j+1} = 0$ (ұяшықтың реті бірге тең болған жағдайда).

Енді $T := S R$ деп белгілейік те, (3) жүйеге

$$x = T y \quad (6)$$

ауыстыруын енгізейік. Онда

$$\frac{dy}{dt} = T^{-1} A T y + T^{-1} f(t, T y).$$

Ал

$$T^{-1} A T = R^{-1} S^{-1} A S R = R^{-1} I R = \Lambda + B_{\varepsilon_0},$$

сондықтан

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda + B_{\varepsilon_0}) y + T^{-1} f(t, T y), \quad (7)$$

мұнда

$$\| B_{\varepsilon_0} \| = \left(\sum_{j=1}^{n-1} |b_{i,j+1}|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n-1} \varepsilon_0;$$

$$\| T^{-1} f(t, T y) \| \leq \| T^{-1} \| \cdot \| T \| \gamma(\| T y \|) \| y \| = C_1 \gamma(\| T y \|) \| y \|,$$

$$C_1 := \| T^{-1} \| \cdot \| T \| \geq 1.$$

Теореманың шарты бойынша $\text{Re } \lambda_q < 0, \forall q = \overline{1, m}$.

Сондықтан егер

$$-\alpha := \max_{1 \leq q \leq m} \text{Re } \lambda_q$$

деп белгілесек, $\alpha > 0$ болады. Ілгеріде келтірілген ε_0 санын әуелде-ақ мына теңсіздікті

$$\varepsilon_0 < \frac{\alpha}{4\sqrt{n-1}}$$

қанағаттандыратындай етіп аламыз. Мұнда $n \geq 2$. Егер $n=1$ болса, A матрицасы диагональдық түрде: $A = \Lambda = a_{11}$. Онда $B_{\varepsilon_0} = 0$.

Мына теңсіздіктің

$$\| x \| \leq \varepsilon \quad (8)$$

орындалуынан

$$\gamma(\|x\|) < \frac{\alpha}{4C_1} \quad (9)$$

теңсіздігі орындалатындай етіп кез келген $\varepsilon > 0$ санын және ол үшін $\delta < \frac{\varepsilon}{4C_1}$

теңсіздігі орындалатындай етіп, $\delta > 0$ санын таңдап алайық

Бастапқы мәні мына теңсіздікті $\|x(t_0)\| < \delta$ қанағаттандыратын (3) жүйенің кез келген $x = x(t)$ шешімін қарастырайық $t = t_0$ мәнінде ε -нан кіші болғандықтан, үзіліссіз функция $x(t)$

$$\|x(t)\| < \varepsilon$$

теңсіздігін t -ның t_0 -ге өте жақын барлық мәндерінде қанағаттандырады. Бұл теңсіздіктің t -ның кез келген t_0 -ден үлкен мәндерінде орындалатынын көрсетейік. Кері жорып, теңсіздік t -ның кейбір мәндерінде орындалмайды және $t = t_1$ сол теңсіздік орындалмайтын бірінші нүкте болсын делік:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &< \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1) \\ \|x(t_1)\| &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (11)$$

$[t_0, t_1]$ кесіндісінде мына теңдікті қарастырайық:

$$\frac{d}{dt} \|y\|^2 = (y, \dot{y}) = (\dot{y}, y) + (y, \dot{y}) = (\dot{y}, y) + \overline{(\dot{y}, y)} = 2\operatorname{Re}(\dot{y}, y).$$

$[t_0, t_1]$ кесіндісінде (8) теңсіздік орындалады:

$$\|x(t)\| = \|Ty(t)\| \leq \varepsilon.$$

Онда (9) теңсіздікке сүйеніп

$$\gamma(\|Ty(t)\|) < \frac{\alpha}{4C_1}, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

теңсіздігін аламыз. (7) жүйеден мына теңдік алынады:

$$\operatorname{Re}(\dot{y}, y) = \operatorname{Re}(\Lambda y, y) + \operatorname{Re}(B_\varepsilon y, y) + \operatorname{Re}(T^{-1} f(t, Ty), y).$$

Ал

$$\operatorname{Re}(\Lambda y, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \overline{y_j} = \sum_{j=1}^k \operatorname{Re} \lambda_j |y_j|^2 \leq -\alpha \|y\|^2$$

$$\operatorname{Re}(B_{\varepsilon_0} y, y) \leq |(B_{\varepsilon_0} y, y)| \leq \|B_{\varepsilon_0} y\| \cdot \|y\| \leq \|B_{\varepsilon_0}\| \cdot \|y\|^2 \leq \sqrt{n-1} \varepsilon_0 \|y\|^2 \leq \frac{\alpha}{4} \|y\|^2,$$

$$\operatorname{Re}(T^{-1} f(t, Ty), y) \leq |(T^{-1} f(t, Ty), y)| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|f(t, Ty)\| \cdot \|y\| \leq$$

$$\leq \|T^{-1}\| \gamma(\|Ty\|) \|T\| \|y\|^2 \leq \frac{C_1 \alpha}{4C_1} \|y\|^2 = \frac{\alpha}{4} \|y\|^2.$$

Сондықтан

$$\frac{d}{dt} \|y\|^2 \leq 2(-\alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4}) \|y\|^2 = -\alpha \|y\|^2.$$

Бұдан t_0 -ден t -ға дейін ($t \in [t_0, t_1]$) интегралдау арқылы

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0; t_1].$$

(6) ауыстыруды ескерсек

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|T\| \cdot \|y(t)\| \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \|x(t_0)\| e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} = \\ &= C_1 \|x(t_0)\| e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0; t_1] \\ \Rightarrow \|x(t)\| &\leq C_1 \|x(t_0)\| \leq C_1 \delta < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Бұл теңсіздік ε_0, δ сандарының таңдап алынған мәндерінде $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын кесінді жоқ екенін білдіреді. Ендеше (11) орындалатын t_1 мәні тіптен жоқ, яғни

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (13)$$

(10) мен (13) теңсіздіктердің орындалуы (3) жүйенің нөлдік шешімінің орнықтылығын білдіреді. Ал δ саны тек қана ε санынан тәуелді болғандықтан, орнықтылық бірқалыпты. (12) теңсіздіктен $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

теңдігі алынатындықтан, нөлдік шешім асимптотикалық та орнықты.

ІІ БӨЛІГІНІҢ ДӘЛЕЛДЕМЕСІ. Анықтық үшін (жалпы талдауға кеселсіз)

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) > 0, j = \overline{1, m}, \operatorname{Re} \lambda_{m+k}(A) \leq 0, k = \overline{1, n-m}$$

деп алайық. Мұндағы m саны $1 \leq m \leq n$ теңсіздігін қанағаттандырады. Біз дәлелдеуді $m < n$ болатын жағдайда жүргіземіз, себебі $m = n$ болғанда дәлелдеу жеңіл жолмен алынады.

Кез келген $\varepsilon_0 > 0$ саны табылып, A матрицасын диагональдық дерлік түрге келтіретін айрықша емес матрицаны $T = T(\varepsilon_0)$ арқылы белгілейік, яғни

$$T^{-1}AT = \Lambda + B_{\varepsilon_0}, \quad |T| \neq 0$$

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad B_{\varepsilon_0} = (b_{jk}), \quad b_{jk} = 0, j \geq k, j < k-1, \|B_{\varepsilon_0}\| \leq \varepsilon_0$$

Мына теңсіздікті

$$0 < \alpha < \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} \lambda_j(A)$$

қанағаттандыратын $\alpha > 0$ санын алайық та, (3) жүйеге $x = e^{\alpha t} Ty$ ауыстыруын енгізейік. Мұндағы T матрицасы мен $y = \operatorname{colon}(y_1, \dots, y_n)$ вектор – функциясы, жалпы алғанда, комплекс мәнді. Сонда

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} T \frac{dy}{dt} + e^{\alpha t} \alpha Ty &= e^{\alpha t} ATy + f(t, e^{\alpha t} Ty) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= (\Lambda - \alpha E)y + B_{\varepsilon_0}y + g(t, y), \end{aligned} \quad (14)$$

мұндағы $g(t, y) := e^{-\alpha t} T^{-1} f(t, e^{\alpha t} Ty)$ және $\Lambda - \alpha E$ матрицасының нақты бөлігі нөлге тең болатын меншікті мәні жоқ.

Кез келген $\varepsilon_1 > 0$ саны үшін $\beta(\varepsilon_1)$ саны табылып,

теңсіздіктері орындалады. Онда $\|x\| = e^{\alpha t} \|Ty\| \leq e^{\alpha t} \|T\| \cdot \|y\| < \beta(\varepsilon_1)$ немесе $\|y\| < \beta(\varepsilon_1) e^{-\alpha t} \|T\|^{-1}$ болғанда,

$$C_1 := \|T^{-1}\| \cdot \|T\| \geq 1$$

теңсіздігі алынады. $g(t, y)$ вектор-функциясының координаттарын $g_1, \dots, g_n$ арқылы, яғни $g(t, y) = colon(g_1(t, y), \dots, g_n(t, y))$, ал мына айырманы

арқылы белгілейік. Онда (14) координаттық түрде былайша жазылады:

мұндағы $\operatorname{Re} \mu_j > 0, j = \overline{1, m}; \operatorname{Re} \mu_{n+k} < 0, k = \overline{1, n-m}.$

Егер тендеулерді комплекс-түйіндес шамалар бойынша жазатын болсақ,

жүйесін аламыз.

Енді мынадай скаляр функція

қарастырайық. Онда

болатындықтан, (15), (16) жүйелерге сүйеніп,

теңдігін аламыз. Мұнда $p(t, y) = 0(\varepsilon)$, яғни $p(t, y)$ - t, y бойынша бірқалыпты ε реттегі шама.

Енді $v := \min(\operatorname{Re} \mu_j - \operatorname{Re} \mu_{m+k}) > 0$ деп алып,

$$\|B_{\varepsilon_0}\| \leq \varepsilon_0, \|y\| < \beta(\varepsilon_1) e^{-\alpha t} \|T\|^{-1} \Rightarrow \gamma(e^{\alpha t} \|Ty\|) < \varepsilon_1$$

теңсіздіктеріне сүйеніп, мейлінше аз $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$) үшін

$$\dot{v}(y) \geq (v - |p(t, y)|) \|y\|^2 \geq \frac{v}{2} \|y\|^2 \geq v v(y)$$

теңсіздігін аламыз. Бұдан $t_0 = 0$, $v(y(0)) > 0$ деп есептеп,

$$v(y(t)) \geq v(y(0)) e^{vt}, \quad (17)$$

Яғни

$$\|y(t)\| \geq 2v(y(t)) \geq 2v(y(0)) e^{vt}, \quad \forall t \geq 0$$

теңсіздігін аламыз.

Бастапқы мән $t_0 = 0$, ал ε – бекітілген болсын.

Кез келген аз $\delta > 0$ санын алайық та, $y(0)$ мәнін

$$0 < \|y(0)\| = \frac{\delta}{1 + \|T\|} < \delta, \quad v(y(0)) > 0$$

шарттарын қанағаттандыратындай етіп алайық (ол үшін, мысалы, $y_{m+k} = 0$, $k = 1, n - m$ деп алса болғаны). Онда (17) теңсіздіктен $t = t_1 > 0$ мәні табылып,

$$\|y(t_1)\| \geq e^{-\alpha t} \|T\|^{-1} \beta(\varepsilon)$$

Бұдан әдепкі $e^{\alpha t} Ty = x(t)$ функциясына көшсек, $\|x(0)\| \leq \|T\| \|y(0)\| < \delta$ және

$$\|x(t_1)\| \geq \frac{1}{\|T\|^{-1}} e^{\alpha t_1} \|y(t_1)\| \geq \frac{\|T\|^{-1}}{\|T^{-1}\|} \beta(\varepsilon),$$

ε – бекітілген. Бұдан $\delta > 0$ санын мейлінше аз етіп алуға болатындықтан, (3) жүйенің нөлдік шешімінің орнықсыздығы шығады. Теорема толығынан дәлелденді.

Е С К Е Р Т У. Теореманың бірінші бөлігін (3) жүйені оған пара–пар интегралдық теңдеумен ауыстырып, сонан кейін Гронуолл леммасын қолдану арқылы да дәлелдеуге болады. Оны келесі параграфта көрсетеміз.

А Н Ы Қ Т А М А. Егер D облысында (1) жүйенің әрбір $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ шешімі мына теңсіздікті

$$\|x(t)\| \leq B \|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

қанағаттандыратын болса, онда (1) жүйенің нөлдік шешімі $t \rightarrow \infty$ кезде экспоненциалдық орнықты деп аталады. Мұндағы $B \geq 1$, $\alpha > 0$ сандары t_0 және $x_0 = x(t_0)$ мәндерінен тәуелсіз.

С А Л Д А Р. Теореманың бірінші бөлігінің шарттары орындалғанда, (1) жүйенің нөлдік шешімі $t \rightarrow \infty$ кезде экспоненциалдық орнықты болады.

Дәлелдеуі (12) теңсіздіктен шығып тұр.

Ляпуновтың теоремасына сүйеніп, жүйенің *тепе-теңдік қалпының (тыныштық нүктесінің)* орнықтылығын анықтауға болады. Автономиялық сызықты емес жүйе берілсін:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (18)$$

мұнда $x = colon(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x) = colon(f_1(x), \dots, f_n(x))$,

$$f(x) \in C^1(D), \quad D = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq h < \infty\}.$$

Егер $f(x_0) = 0 = colon(0, \dots, 0)$, $x_0 \in D$ болса, онда $x = x_0$ (16) жүйенің тепе-теңдік қалпы болады (1-тарау, § 1). Мынадай ауыстыру

$$x = x_0 + y$$

енгізейік. Онда

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)y + 0(\|y\|) = Ay + 0(\|y\|).$$

Мұнда

$$A := f'(x_0) = \left(\frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_k} \right), \quad j, k = \overline{1, n}$$

Якоби матрицасы, ал $0(\|y\|) - \|y\|$ -пен салыстырғанда мәні мейлінше аз болатын шама.

Сондықтан x_0 тепе-теңдік қалпынан ауытқуды бейнелейтін функция y бойынша

$$\frac{dy}{dt} = Ay + 0(\|y\|)$$

жүйесін аламыз. Ляпунов теоремасын қолданып, мынадай тұжырымға келеміз.

ТЕОРЕМА. Егер Якоби матрицасының барлық меншікті мәндерінің нақты бөліктері теріс болса, онда (18) жүйенің $x = x_0$ тепе-теңдік қалпы $t \rightarrow \infty$ кезде асимптотикалық орнықты болады.

М Ы С А Л Д А Р. Ляпунов теоремасын пайдаланып, төмендегі жүйелердің нөлдік шешімінің (немесе теңбе-теңдік қалпының) орнықты немесе орнықсыз болатынын анықтау керек.

$$1. \quad \frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$f = colon(f_1, f_2), \quad f_1 := x_1^2 \cos t, \quad f_2 := 2x_1x_2 + x_2^3.$$

Жүйенің нөлдік шешімі ($x_0 = 0$) бар. $f(t, x)$ вектор-функциясы (4) шартты қанағаттандырады. A матрицасының меншікті мәндері, яғни сипаттаушы теңдеудің

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

түбірлері өзара тең және теріс $\lambda_{1,2} = -1$. Олай болса, жүйенің нөлдік шешімі асимптоталық орнықты.

$$2. \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = colon(x_1, x_2),$$

$$f(x) = colon(f_1(x_1, x_2)), \quad f_1 := 2x_1 + 8\sin x_2, \quad f_2 := 2 - e^{x_1} - 3x_2 - \cos x_2.$$

Координаттың бас нүктесі ($x_1 = x_2 = 0$) жүйенің теңбе–теңдік қалпы болып табылады. Якоби матрицасының:

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \cos x_2 \\ -e^{x_1} & -3 + \sin x_2 \end{pmatrix}.$$

$x_0 = \text{colon}(0,0) = 0$ нүктесіндегі мәні

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Оның меншікті сандары, яғни оның сипаттаушы теңдеуінің

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ -1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

түбірлері комплекс мәнді. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}$. Олардың нақты бөліктері теріс.

Демек, жүйенің $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ теңбе–теңдік қалпы асимптоталық орнықты.

$$3. \frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), x = \text{colon}(x_1^2 + x_2^2 \sin t, x_1 x_2 e^{-t} - x_2^2).$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f = \text{colon}(x_1^2 + x_2^2 \sin t, x_1 x_2 e^{-t} - x_2^2).$$

Сызықты емес $f(t, x)$ вектор–функциясы (4) шартты қанағаттандырады. A матрицасының меншікті мәндері $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2}$. Олардың біреуі оң. Олай болса, жүйенің нөлдік шешімі орнықсыз.

4. Жүйедегі

$$\frac{dx}{dt} = f(x), f = \text{colon}(x_2 + \sin x_1, ax_1 + bx_2)$$

a және b параметрлерінің қандай мәндерінде оның $x_1 = x_2 = 0$ теңбе–теңдік қалпы асимптоталық орнықты? Якоби матрицасының

$$f'(0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

меншікті мәндері, мына сипаттаушы теңдеуден

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1 + b)\lambda + b - a = 0$$

табылады. Бұл теңдеу үшін Гурвиц матрицасын құрайық.

$$G = \begin{pmatrix} -(1 + b) & 1 \\ 0 & b - a \end{pmatrix}.$$

Сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің нақты бөліктері теріс болуы үшін

$$\Delta_1 = -(1+b) > 0$$

$$\Delta_2 = -(1+b)(b-a) > 0$$

теңсіздіктерінің орындалуы шарт. Бұдан $a < b < -1$ теңсіздігін аламыз. Осы шарт орындалғанда, жүйенің $x_1 = x_2 = 0$ теңбе-теңдік қалпы асимптоталық орнықты.

$$5. \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - ty + y^2 \\ \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y} \end{cases} \quad (19)$$

жүйесінің мына

$$\begin{cases} x = -t^2, \\ y = t \end{cases} \quad (20)$$

шешімінің орнықты, орнықсыздығын зерттеу керек.

Берілген жүйеге

$$\begin{cases} u = x + t^2, \\ v = y - t \end{cases}$$

ауыстыруын енгізейік, $u = u(t)$, $v = v(t)$ – жаңа функциялар. Онда

$$\begin{cases} \dot{u} = -u - 2v + v^2, \\ \dot{v} = 2u - 2v + 2v^2 + \dots \end{cases} \quad (21)$$

Бұл жүйенің нөлдік шешімі ($u = v = 0$) бар. Сызықтық емес мүшелері (4) шартты қанағаттандырады. Сызықтық

$$\begin{cases} \dot{u} = -u - 2v, \\ v = 2u - 2v \end{cases}$$

жүйесінің сипаттаушы теңдеуінің түбірлері $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{15}}{2}$. Нақты бөліктері теріс. Сондықтан (21) жүйенің нөлдік шешімі орнықты. Ал бұл жүйенің нөлдік шешіміне (19) жүйенің (20) шешімі сәйкес келеді. Олай болса, (19) жүйенің (20) шешімі бірінші жуықтау бойынша асимптоталық орнықты.

Ж А Т Т Ы Г У Л А Р

Төмендегі жүйелердің нөлдік шешімінің бірінші жуықтау бойынша орнықты не орнықсыз болатынын тексеріңіз.

1. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 22\sin y + x^2 - y^2, \\ \dot{y} = \sin x - 5y + e^{x^2} - 1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 8\sin^2 y, \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3. \end{cases}$$

5. Кедергісі бар ортада тербелетін маятник қозғалысының теңдеуі:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = 0.$$

Мұндағы x —бұрыштық координат, a, b —оң сандар. Маятниктің $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ теңбе-теңдік қалпының орнықтылығын зерттеңіз (4—мысалды қараңыз).